Courant électrique dans une bobine

I.Présentation

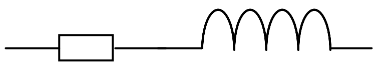
I.a. Représentation

Doc. 7. Bobines de différentes formes.

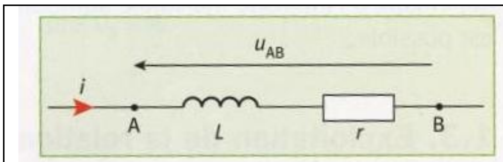
Une bobine est un fil de cuivre vernissé pour isoler, enroulé sur un support.
Les grandeurs caractéristiques sont :

- Le nombre de spires **n**
- La résistance interne **r** qui s'exprime en ohm (Ω)
- L'inductance **L** qui s'exprime en henry (H)

Symbole de la bobine

Bobine parfaite	 L
Bobine réelle	 r L

I.b. Tension aux bornes d'une bobine.

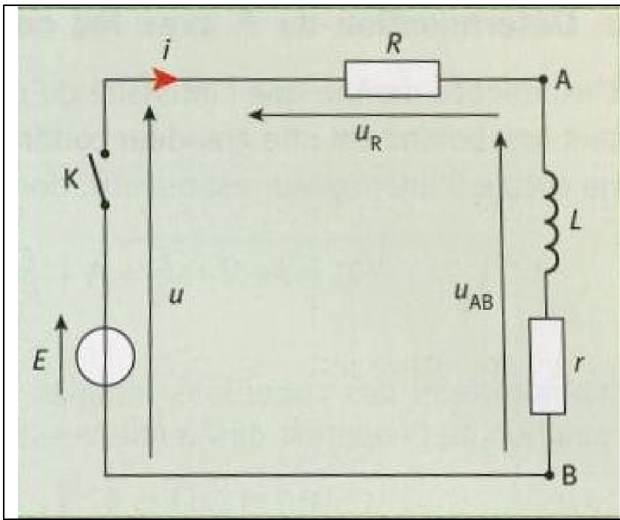
	$U_{AB} = L\frac{di}{dt} + ri$

La bobine s'oppose aux variations de courant dans le circuit.

8,9,10 P98 orientation d'un circuit.

II.Etude du circuit (R,L) lors de l'établissement du courant.

II.a. Equation différentielle du circuit.



D'après la loi d'additivité des tensions :

$$E = U_R + U_{AB}$$

Or

- $U_R = Ri$
- $U_{AB} = L\dfrac{di}{dt} + ri$

D'où l'équation différentielle :

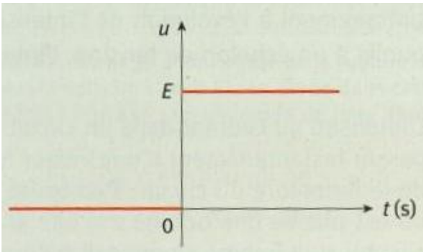
$L\dfrac{di}{dt} + (r+R)i = E$

Soit $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{(R+r)}{L}i = \dfrac{E}{L}$

Si on pose $\tau = \dfrac{L}{R+r}$ alors on obtient : $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{\tau} = \dfrac{E}{L}$.Cette équation régit le fonction du circuit.

II.b. Conditions initiale et finale.

On s'intéresse ici à la réponse du circuit à un échelon de tension :



La solution est du type :

$i(t) = Ae^{-mt} + B$ où A,B,m sont des constantes (avec m positif)

- à t = 0s, i = 0 A donc $\mathbf{0 = A + B}$
- Quand t tend vers l'infini, $i = \dfrac{E}{R+r}$ donc $\dfrac{E}{R+r} = \mathbf{B}$

Bilan : $\dfrac{E}{R+r} = \mathbf{B}$ **et** $\mathbf{A} = -\dfrac{E}{R+r}$ d'où $i(t) = -\dfrac{E}{R+r}e^{-mt} + \dfrac{E}{R+r}$

Soit $i(t) = \dfrac{E}{R+r}(1-e^{-mt})$ si on pose $\tau = \dfrac{L}{R+r}$ alors $i(t) = \dfrac{E\tau}{L}(1-e^{-mt})$

II.c. Détermination de m

$i(t) = \frac{E\tau}{L}(1\text{-}e^{-mt})$ et $\frac{di}{dt} = \frac{mE\tau}{L}e^{-mt}$ en substituant dans l'équation différentielle

$\frac{di}{dt}+\frac{i}{\tau}=\frac{E}{L}$ on obtient : $\frac{mE\tau}{L}e^{-mt}+\frac{E}{L}(1\text{-}e^{-mt})=\frac{E}{L}$ soit $m\tau\, e^{-mt}+(1\text{-}e^{-mt})=1$ d'où

$m\tau\, e^{-mt} - e^{-mt} = 0$ en factorisant on obtient : $e^{-mt}(m\tau - 1) = 0$ donc $(m\tau - 1) = 0$

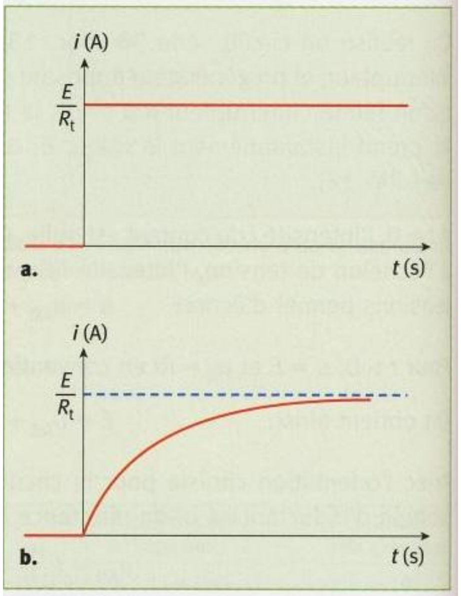
D'où $m = \frac{1}{\tau}$

Dimension de τ

On utilise les formules : $R = \frac{U}{I}$ et $U_{AB} = L\frac{di}{dt}$

$R = \frac{U}{I}$	$[R] = \Omega = \frac{V}{A}$
$U_{AB} = L\frac{di}{dt}$	$[L] = H = \frac{V.s}{A}$
$\tau = \frac{L}{R}$	$[\tau] = \frac{V.s}{A}\frac{A}{V} = s$ τ a la dimension d'un temps.

II.d. Solution.



Doc. 15. Évolution de l'intensité du courant à la fermeture d'un circuit sans bobine (**a**), et à la fermeture d'un circuit RL (**b**).

$$i(t) = \frac{E}{R+r}(1\text{-}e^{\frac{-t}{\tau}})$$

avec

$$R_t = R + r$$

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

II.e. Détermination expérimentale de τ (à partir d'un graphique)

Méthode 1 :

$$i(t) = \frac{E}{R+r}(1\text{-}e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Détermination de l'équation de la tangente à t = 0s

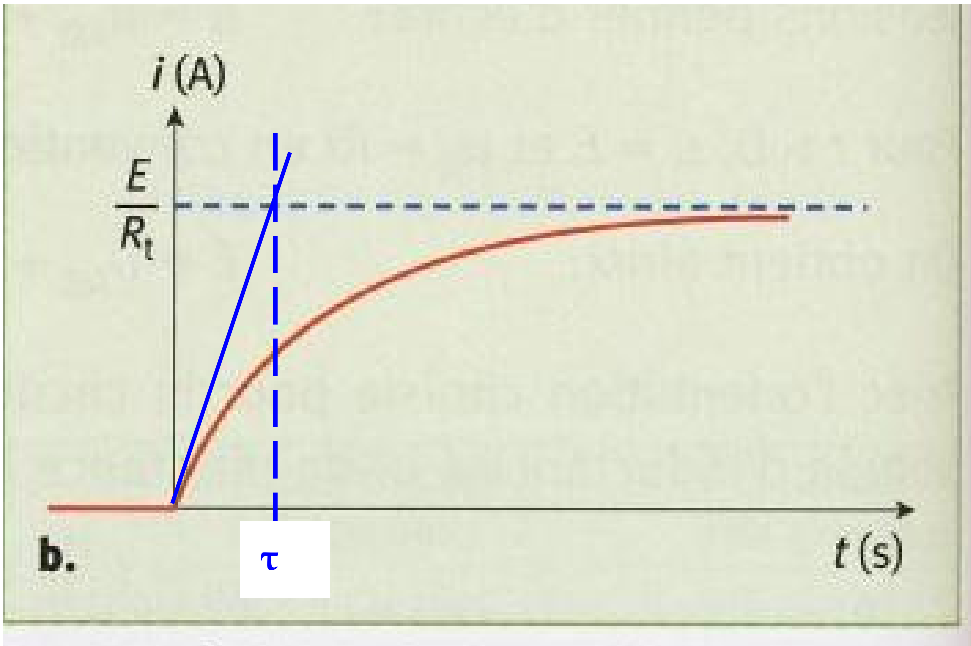
$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}.e^{\frac{-t}{\tau}}$ en t = 0s on a $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}$

Donc l'équation de la tangente $\mathbf{T_0\ (t) = \frac{E}{L}t}$

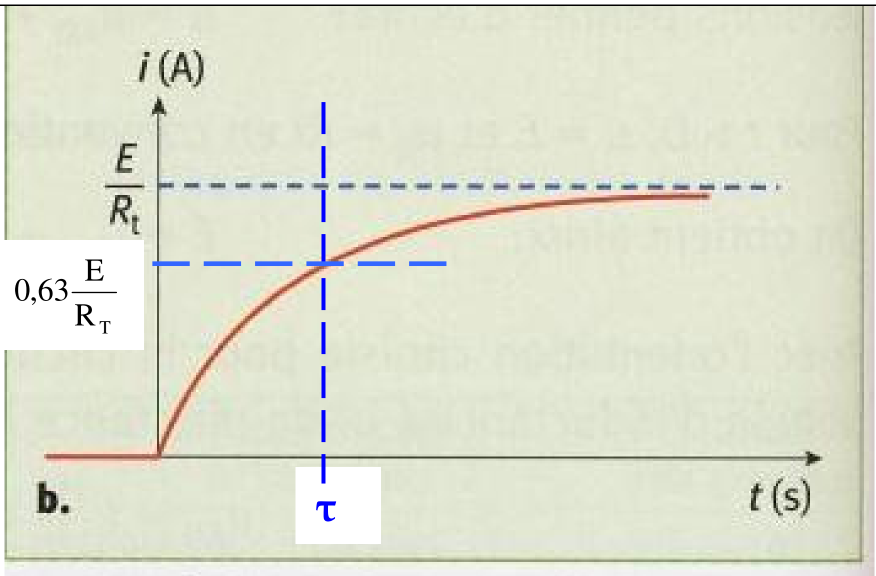
On cherche l'intersection entre l'asymptote $\frac{E}{R_T}$ et la tangente T_0. Il faut donc résoudre l'équation T_0 (t) = $\frac{E}{R_T}$

Soit $\frac{E}{L}t = \frac{E}{R_T}$, la solution est $\mathbf{t = \frac{L}{R+r} = \tau}$

Donc la tangente coupe l'asymptote pour **t = τ**



Méthode 2



$$i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

Pour $t = \tau$ on a

$$i(\tau) = \frac{E}{R+r}\left(1-e^{-1}\right) = 0{,}63\,\frac{E}{R+r}$$

Méthode 3

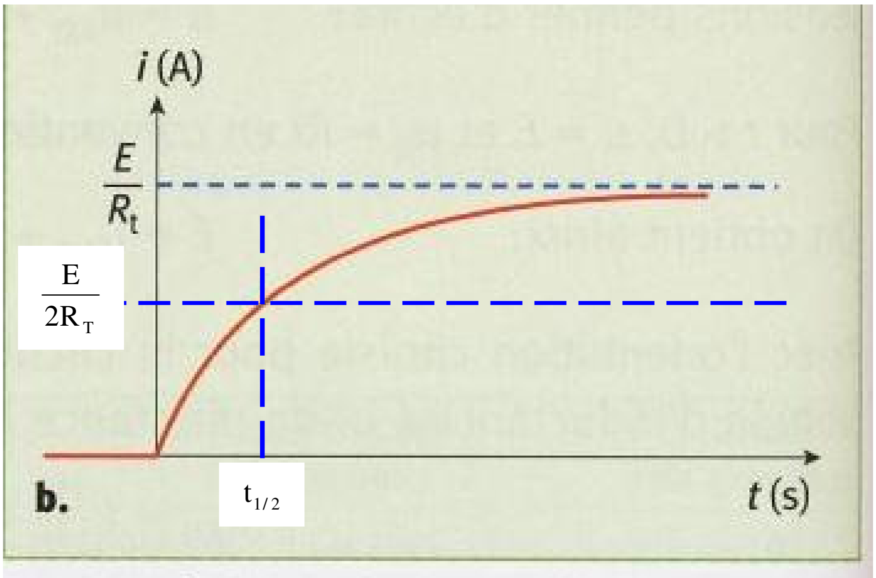
$$i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

Pour $t = t_{1/2}$ l'intensité est à la moitié de la valeur maximale donc $i(t_{1/2}) = \frac{E}{2(R+r)}$

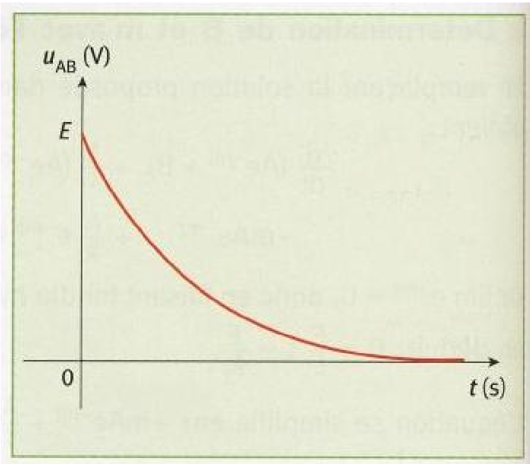
D'où $i(t_{1/2}) = \frac{E}{R+r}\left(1-e^{\frac{-t_{1/2}}{\tau}}\right) = \frac{E}{2(R+r)}$

Soit $1-e^{\frac{-t_{1/2}}{\tau}} = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire que $\frac{1}{2} - e^{\frac{-t_{1/2}}{\tau}} = 0$

D'où $\frac{1}{2} = e^{\frac{-t_{1/2}}{\tau}}$ donc $\mathbf{\ln 2 = \frac{t_{1/2}}{\tau}}$



II.f. Tension aux bornes de la bobine



Doc. 16. Représentation de la tension aux bornes d'une **bobine idéale** ($r = 0$) lors de la fermeture du circuit.

$$U_{AB} = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$i(t) = \frac{E}{R+r}(1-e^{\frac{-t}{\tau}}) \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{E}{\tau(R+r)} e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$\text{soit : } U_{AB} = \frac{-LE}{(R+r)\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$$

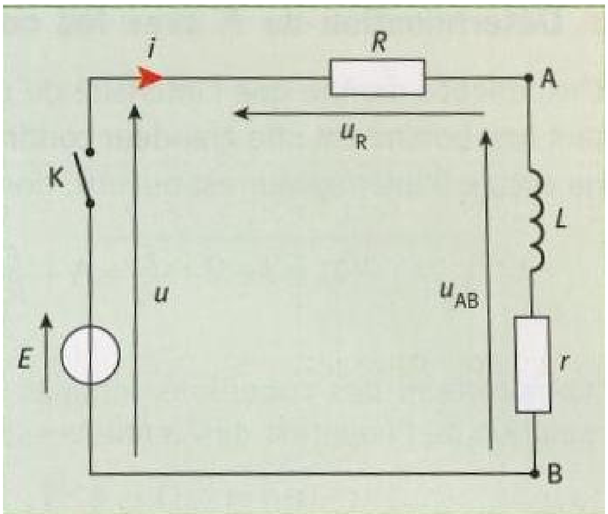
$$U_{AB} = Ee^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$$

$$U_{AB} = E\,e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

La tension U_{AB} s'oppose au passage du courant.

III.Etude du circuit RL lors de la rupture du courant.

III.a. Equation différentielle



Ici E = 0V

D'après la loi d'additivité des tensions :
E =0 V

$$0 = U_R + U_{AB}$$

Or

- $U_R = Ri$
- $U_{AB} = L\frac{di}{dt} + ri$

D'où l'équation différentielle :

$L\frac{di}{dt} + (r+R)i = 0$

Soit $\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = 0$

Si on pose $\tau = \frac{L}{R+r}$ alors on obtient : $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$

III.b. Conditions initiale et finale.

On s'intéresse ici à l'évolution de i(t) quand E = 0V

La solution est du type :

$i(t) = Ae^{-mt} + B$ où A,B,m sont des constantes (avec m positif)

- à t = 0s, $i = \frac{E}{R+r}$ A donc $\frac{E}{R+r}$ **= A + B**
- Quand t tend vers l'infini, i = 0 A donc **B** = 0A

Bilan : **B= 0A et A =** $\frac{E}{R+r}$ d'où $i(t) = \frac{E}{R+r}e^{-mt}$

Soit $i(t) = \frac{E}{R+r}e^{-mt}$ si on pose $\tau = \frac{L}{R+r}$ alors $i(t) = \frac{E\tau}{L}e^{-mt}$

III.c. Détermination de m

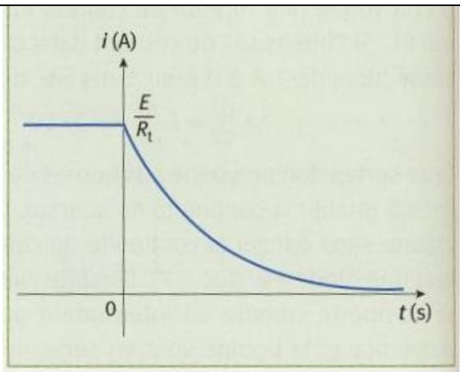
$i(t) = \frac{E\tau}{L}e^{-mt}$) et $\frac{di}{dt} = -\frac{mE\tau}{L}e^{-mt}$ en substituant dans l'équation différentielle

$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$ on obtient : $-\frac{mE\tau}{L}e^{-mt} + \frac{E}{L}e^{-mt} = 0$ soit $-m\tau e^{-mt} + e^{-mt} = 0$ d'où

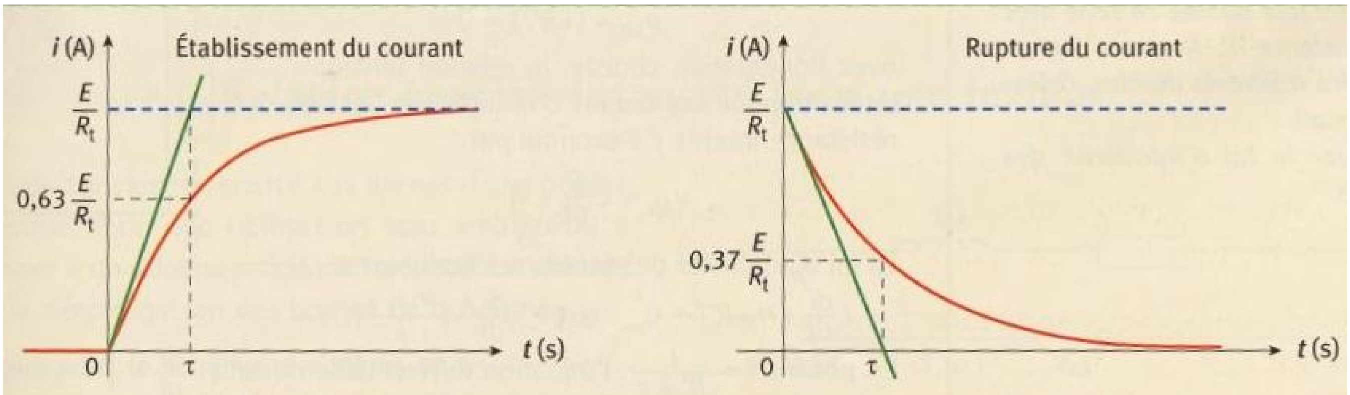
$m\tau e^{-mt} - e^{-mt} = 0$ en factorisant on obtient : $e^{-mt}(m\tau - 1) = 0$ donc $(m\tau - 1) = 0$

D’où $m = \frac{1}{\tau}$

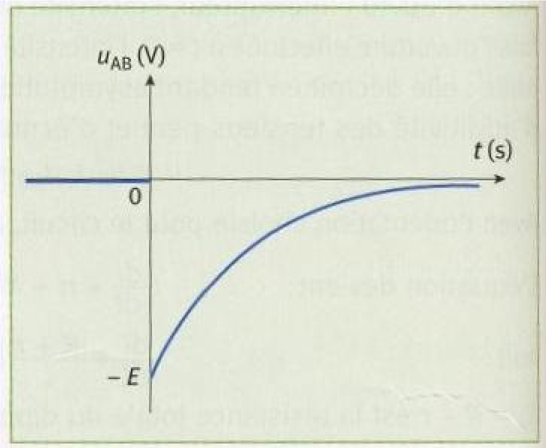
III.d. Solution

 **Doc. 18.** Représentation de l'intensité lors de la rupture du courant dans un circuit RL.	$i(t) = \frac{E}{R+r} e^{\frac{-t}{\tau}}$ avec $R_t = R + r$ $\tau = \frac{L}{R+r}$

III.e. Détermination expérimentale de τ



III.f. Tension au aux bornes de la bobine.



Doc. 19. Représentation de la tension aux bornes d'une bobine idéale ($r = 0$), lors de la rupture du courant.

$$U_{AB} = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$i(t) = \frac{E}{R+r}e^{\frac{-t}{\tau}} \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{-E}{(R+r)\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

soit : $U_{AB} = \frac{-LE}{(R+r)\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}e^{\frac{-t}{\tau}}$ d'où

$$U_{AB} = -E\,e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$U_{AB} = \frac{-R}{R+r}E.e^{\frac{-t}{\tau}}$$

IV. Energie emmagasinée dans une bobine.

Uns bobine parcourue par un courant i emmagasine une énergie notée :

$$\mathcal{E}_{bob} = \frac{1}{2}Li^2$$

$\mathcal{E}_{bob}$: en J
L : en H
I : en A

11,14,17,24,25 P99