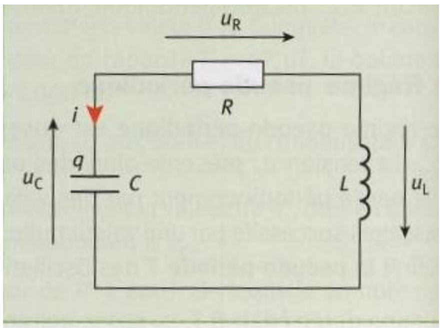
Oscillation dans un circuit RLC

I.Décharge d'un condensateur dans un dipole RL

I.a. Le montage

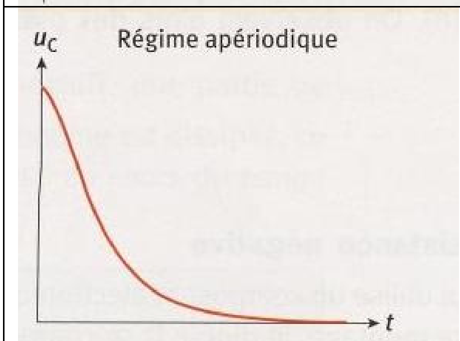
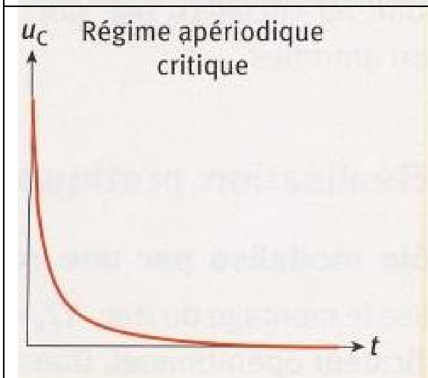
Le condensateur est initialement chargé. Il se décharge dans le dipôle RL



Doc. 12. Circuit RLC série orienté.

I.b. Les trois régimes libres du circuit RLC

On mesure U_C avec un oscilloscope pour différentes valeurs de R

	Le régime pseudo-périodique est observé pour de faibles valeurs de R $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
	• Lorsque est grand (amortissement imporatnt), $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ on observe une décharge du condensateur sans que la tension oscille. • On parle de régime apériodique (sans période)
	• Ici $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, c'est dans ce cas que U_C tend le plus rapidement vers la valeur nulle. On parle de régime apériodique critique. • Il n'y a pas d'oscillation.

I.c. Equation différentielle d'un circuit RLC série en régime libre

D'après la loi d'additivité des tensions on peut écrire :

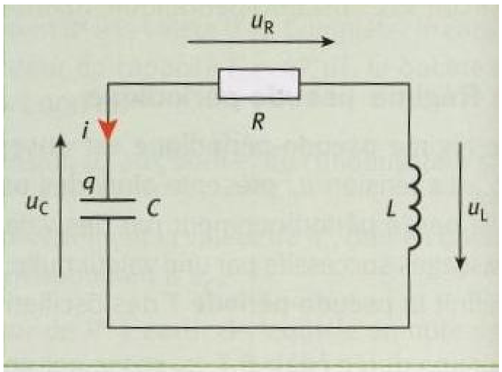
$U_R + U_L + U_C = 0$

De plus

$$U_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{dU_C}{dt}$$

$$U_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = L\frac{d^2q}{dt^2} = LC\frac{d^2U_C}{dt^2}$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

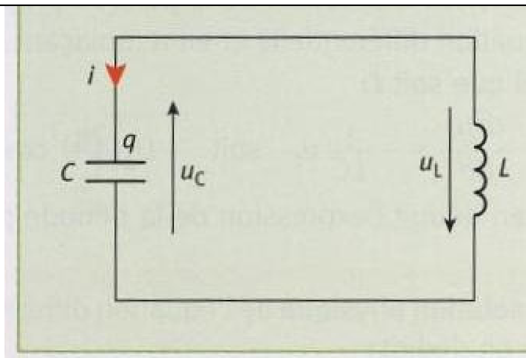


Doc. 12. Circuit RLC série orienté.

D'où $LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$

II.Oscillations non amorties d'un circuit LC

II.a. Mise en équation

Dans ce cas **R=0 Ω** l'équation précédente devient : $LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + U_C = 0$	 **Doc. 13.** Circuit LC en régime libre.

II.b. Résolution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation est $U_C = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$

A est l'amplitude et $\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$ la phase des oscillations.

$\mathbf{T_0}$ est la période propre des oscillations de la tension U_C.

φ est la phase à l'instant t = 0

Détermination de A et φ

Il faut utiliser les conditions initiales :

- $U_C\ (t=0) = U_0$

- $q(t=0) = C\,U_0$
- $i(t=0) = 0$

Exprimons i(t) :

$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$ de plus $\frac{dU_C}{dt} = -A\frac{2\pi}{T_0}\sin(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi)$ d'où $i = -CA\frac{2\pi}{T_0}\sin(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi)$

Pour t=0 on a $i\,(0) = -CA\frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)$ or $i\,(0) = 0$ donc $\sin(\varphi) = 0$ et $\boldsymbol{\varphi = 0}$ (à π près)

De plus $U_C\,(t=0) = A = U_0$ donc $\mathbf{A = U_0}$

Détermination de T_0

On va injecter la solution $U_C = A\cos(\frac{2\pi t}{T_0})$ dans l'équation différentielle $LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + U_C = 0$

$U_C = A\cos(\frac{2\pi t}{T_0})$

$\frac{dU_C}{dt} = -A\frac{2\pi}{T_0}\sin(\frac{2\pi t}{T_0})$

$\frac{d^2U_C}{dt^2} = -A\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos(\frac{2\pi t}{T_0})$

$-LCA\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos(\frac{2\pi t}{T_0}) + A\cos(\frac{2\pi t}{T_0}) = 0$ d'où $-LC\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + 1 = 0$ soit $1 = LC\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

Donc $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

II.c. Analyse dimensionnelle de la période propre.

On utilise les formules suivantes

- $q = CU$
- $U_B = L\frac{di}{dt}$
- $i = \frac{dq}{dt}$

[L]	$\frac{V.s}{A}$
[C]	$\frac{C}{V} = \frac{A.s}{V}$
[L]. [C]	s^2
[$\sqrt{L.C}$]	s

II.d. Pseudo-période T et période propre T_0

- La pseudo période T est toujours plus grand que la période propre T_0

- La pseudo-période T est d'autant plus proche de la période propre T_0 que l'amortissement est faible.

III.Etude énergétique.

III.a. Bilan énergétique

$U_R + U_L + U_C = 0$ soit $Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

Multiplions par i : (on rappelle que $i = \frac{dq}{dt}$)

$Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0$

On rappelle aussi que $(u^n)' = n.u^{(n-1)}.u'$

On peut transformer l'écriture en : $Ri^2 + L\frac{d}{dt}(\frac{i^2}{2}) + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}(\frac{q^2}{2}) = 0$ soit $Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}) = 0$

Energie ξ_B emmagasinée dans la bobine à la date t

Energie ξ_C emmagasinée dans le condensateur à la date t

On appelle ξ (t) l'énergie emmagasinée par le circuit.

$\xi(t) = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$

On peut donc écrire que $Ri^2 + \frac{d\xi}{dt} = 0$

III.b. Interprétation

Cas d'un amortissement négligeable R = 0 Ω

L'équation précédente devient : $\frac{d\xi}{dt} = 0$, c'est-à-dire que l'énergie emmagasinée ξ est constante

$\boldsymbol{\xi = \xi_B + \xi_C}$ d'où $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d(\xi_B + \xi_C)}{dt} = 0$ soit $\frac{d\xi_B}{dt} + \frac{d\xi_C}{dt} = 0$ d'où $\frac{d\xi_B}{dt} = -\frac{d\xi_C}{dt}$

La relation $\frac{d\xi_B}{dt} = -\frac{d\xi_C}{dt}$ montre qu'il y a échange d'énergie entre la bobine et le condensateur, l'énergie totale reste constante.

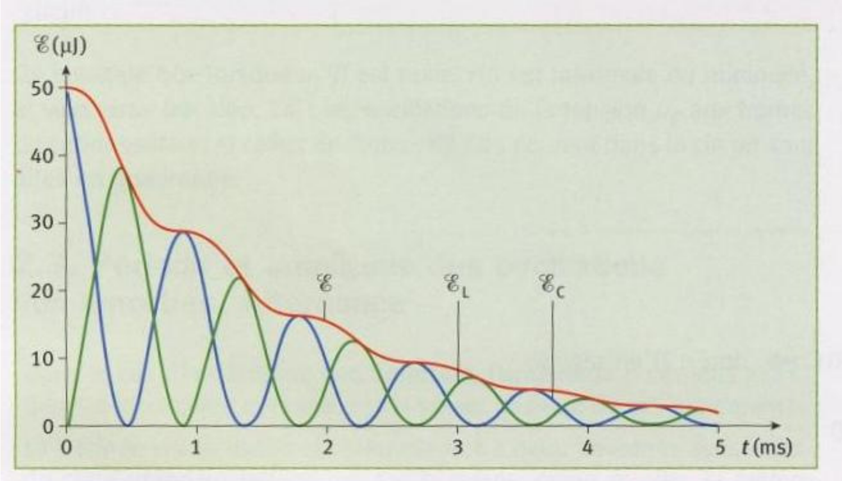
<table>
<tr>
<td>

<u>Cas d'un amortissement non négligeable</u>

Dans ce cas $\frac{d\xi}{dt} = -Ri^2$; la dérivé $\frac{d\xi}{dt}$ est négative donc ξ(t) décroît.

Le circuit perd de l'énergie. (Echauffement de la résistance)

</td>
<td>

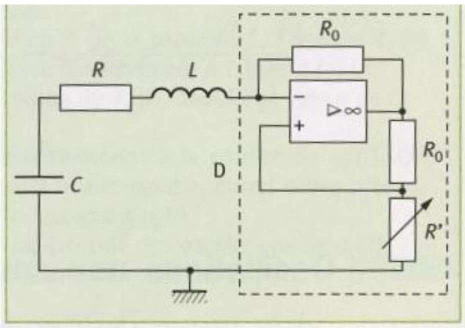


Evolution au cours du temps de l'énergie totale ξ du circuit RLC, de l'énergie ξ_C et de l'énergie ξ_L dans le cas d'oscillations amorties

</td>
</tr>
</table>

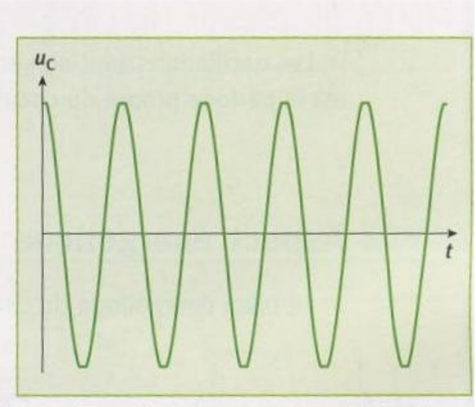
IV.<u>Entretien des oscillations</u>

Les oscillations s'atténuent car il y a une perte d'énergie au niveau de la résistance du circuit RLC par effet joule. Pour limiter les pertes d'énergie il faut donc limité la valeur de **R**.
Or la plus petite valeur que l'on puisse obtenir pour R c'est la valeur de la résistance de **la bobine**.
Pour compenser les pertes énergétiques du dipôle RLC, on peut envisager de lui associer un dipôle D qui lui restitue à chaque instant l'énergie qu'il perd. Une solution consiste à utiliser une résistance négative, ainsi la résistance globale du circuit devient **nulle.**



Doc. 17. Schéma de l'oscillateur à résistance négative.

- Si **R > 0**, il y a **amortissement** des oscillations
- Si **R = 0** les oscillations sont **entretenues**
- Si **R < 0** les oscillations sont d'amplitude **croissante** jusqu'à une valeur maximal.



Doc. 18. Oscillations quasi-sinusoïdales de u_C.

Ici la résistance totale R du circuit à pour valeur

R = **0 Ω**

1.3 En résumé

$$a \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0 .$$

Poser l'équation caractéristique : $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$. Calculer son discriminant Δ. (rappel $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) On distingue alors 3 cas.

- Δ>0, le polynome admet deux racines réelles r_1 et r_2. Alors $x(t) = A \cdot e^{r_2 \cdot t} + B \cdot e^{r_1 \cdot t}$. Il reste à déterminer A et B en fonction des conditions initiales (par exemple x(0) = ... et $\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right)_{t=0}$ =...
- Δ=0 , le polynome admet une seule racine réelle, r (dite racine double). Alors $x(t) = (A \cdot t + B) \cdot e^{r_1 \cdot t}$. Il reste à déterminer A et B en fonction des conditions initiales
- Δ<0 le polynome admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i \cdot \beta$ et $r_2 = \alpha - i \cdot \beta$. La solution est alors de la forme $x(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\beta \cdot t) + B \cdot \sin(\beta \cdot t))$. Il reste à déterminer A et B, en fonction des conditions initiales.

  Note : La solution peut être mise sous la forme $x(t) = K \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t + \varphi)$. Dans ce cas, les conditions initiales permettent de déterminer K et φ.